Завдання І туру

VII Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.

11 клас

1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2+2x+1}+|x-2014|+y^{2014}=2015$.

2. Довести нерівність: $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \ge \sqrt[32]{xyz}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

3. Знайти суму коренів рівняння: $\left|\sqrt{2}|x|-\sqrt{5}\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}x^2+\sqrt{11}|x|$.

4. Яким є найбільший діаметр кулі, якщо в коробці розмірами $24\times24\times24$ см вміщується дев'ять таких куль?

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі сторони $AB=BC=2$, $CD=2\sqrt{3}$, $DA=2\sqrt{5}$. Нехай *M, N* – середини діагоналей AC і BD відповідно та $MN=\sqrt{2}$. Визначити площу чотирикутника *ABCD.*

6. Чи існує такий многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c,$ $|c|\le 2014$, усі три корені якого – цілі числа та $f(34)$ - просте число?

7. Дно прямокутної коробки викладено плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2×2. Замість неї дістали плитку розміром 1×4. Доведіть, що викласти тепер дно коробки не вдасться.

8. Дано квадрат 2015×2015 розбитий на одиничні квадратики. Два гравці по черзі зафарбовують у синій колір одиничні відрізки, які є межами одиничних квадратів, що розташовані всередині чи на межі даного квадрата та ще не були зафарбовані. Перемагає той гравець, після ходу якого вперше з'являється одинична клітинка, усі чотири сторони якої зафарбовані у синій колір. Хто перемагає у цій грі при правильній грі обох – той, хто починає чи той, хто ходить другим?