Відповіді до завдань І туру
VII обласної Інтернет-олімпіади з математики 2014-2015 н.р.
8 клас

1. Мама дала Петрику грошей на 30 олівців. Виявилось, що в магазині проходила рекламна акція: в обмін на товарний чек про купівлю набору з 20 олівців магазин повертає 25% вартості набору, а в обмін на товарний чек про купівлю набору з 5 олівців – 10%. Яку найбільшу кількість олівців може принести додому Петрик?

Розв'язання. *Нехай Петрик спочатку купив 20 олівців. Магазин повернув йому 25% тобто ціну 5 олівців. В нього було грошей ще на 10 олівців, тому він може придбати 15 олівців. І за ці 5х3 олівців магазин знову повертає ціну півтора олівця. За ці гроші він зможе придбати ще один олівець. Отже, всього 36 олівців.*

***Відповідь**: 36 олівців.*

2. Обчисліть НСД($2013^{2014}+256^{2013}$; 2013^{2015}).

***Розв'язування:** Спільний дільник чисел $2013^{2014}+256^{2013}$ та 2013^{2015} є також дільниками чисел 2013^{2014} , 2013^{2015}, 256^{2013} . Оскільки 256 та 2013 взаємно прості то НСД($2013^{2014}+256^{2013}$; 2013^{2015})=1.*

Відповідь: 1.

3. Знайти два прості двозначні числа, що складаються з одних і тих самих цифр, якщо різниця між цими числами дорівнює повному квадрату.

***Розв'язання.** Позначимо перше число* $10x+y$*, тоді друге* $10y+x$*, маємо:*

$1 \le x \le 9, \quad 1 \le y \le 9$. *Складемо рівняння* $(10x+y)-(10y+x)=n^2$,

$9(x-y)=n^2$. *Звідки* $x-y=1$ *або* $x-y=4$.

Якщо $x-y=1$*, то одне двозначне число буде парним, тобто складеним, а це не задовольняє умови, отже* $x-y=4$.

Аналіз варіантів показує, що підходить два числа.

Відповідь. 37, 73.

4. Доведіть, що серед будь-яких 100 цілих чисел можна вказати 15 чисел таких, що різниця будь-яких двох із них ділиться на 7 без остачі. Чи можна знайти 16 чисел, які задовольняли б ту саму умову?

***Розв'язання.** Різниця двох цілих чисел ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли остачі від ділення цих чисел на 7 однакові. При діленні на 7 є сім різних остач : 0;1;2;3;4;5;6.*

*Припустимо, що не можна вибрати 15 чисел, які задовольняють дану умову. Це означає, що чисел, які при діленні на 7 дають остачу **r*** $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ *не більше ніж 14. У цьому разі маємо не більше як* $7 \cdot 14 = 98$ *чисел.*

Суперечливість. Отже, існують 15 чисел, які при діленні на 7 дають однакову остачу.
Для 16 твердження задачі не виконується. Наприклад, серед усіх натуральних чисел від1 до 100 включно не можна виділити набір з 16 чисел, що при діленні на 7 мають однакову остачу. Останнє твердження доводиться безпосередньою перевіркою.

5. Чи має розвязки в цілих числах рівняння $x^3 + x + 10y = 2014$?

Розв'язання. знайдемо останню цифру числа $x^3 + x + 10y$, склавши таблицю:

Остання	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
цифра	x^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
числа	$x^3+x+10y$	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8

Бачимо, що число $x^3 + x + 10y$ при будь-яких цілих x і y закінчується однією з цифр: 0; 2; 8 - і отже, не може дорівнювати 2014.
Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

6. Порівняйте $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2014}{2015!}$ і **1**. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.)$

Розв'язання. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2014}{2015!}=\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+\ldots+\frac{2015-1}{2015!}=$
$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{2014!}-\frac{1}{2015!}=1-\frac{1}{2015!}<1.$

7. На деякому острові живе 2014 жителів, кожний з яких або лицар (завжди говорить правду), або брехун (завжди каже неправду). Одного разу всі жителі острова розбились на пари, і кожен про свого напарника сказав один вислів: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитись так, що і тих, і інших висловів виявилось порівну?

Розв'язання.

Ні. Якщо в парі стоять обидва лицарі або обидва брехуни, то вони один про одного скажуть «він лицар», якщо ж в парі стоять один лицар і один брехун, то вони обидва скажуть «він брехун». Тобто кожен вислів буде сказано парну кількість разів. Якби таких висловів було б порівну, то кожен з них прозвучав би 2014:2=1007 разів. А це число непарне.

8. За правилами гри, у трійці довільних чисел, замінюються кожне число сумою двох інших. Наприклад $\{6;10;15\}\to\{25;21;16\}$. Перемагає той у кого першим з'явиться число 2014. Андрій розпочинає із трійки $\{3;4;5\}$. Чи має він шанс виграти ? Відповідь поясніть.

Розв'язання: *Андрій розпочинає із трійки що має вигляд* $\{2^n-1;2^n;2^n+1\}$, *де* *n=2.тому він може отримувати таку трійку:*

$\left\{2^{n}+2^{n}+1;2^{n}-1+2^{n}+1;2^{n}-1+2^{n}\right\}=\left\{2^{n+1}+1;2^{n+1};2^{n+1}-1\right\}\to\ldots\to\left\{2^{k+n}\pm1;2^{k+n};2^{k+n}\mp1\right\}$ *, де* $k\in N$ *, що є трьома послідовними натуральними числами, одне з яких є степенем двійки, оскільки* 2^{10}*=1024, а* 2^{11}*=2048, то отримати число 2014 Андрій не зможе.*

Відповідь: ні.