Відповіді до завдань І туру
VІІ обласної Інтернет-олімпіади з математики 2014-2015 н.р.
10 клас

Завдання 1

x_1 є меншим із коренів рівняння $x^2+x-1=0$. Знайдіть значення виразу: $x_1^5-5x_1$

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння $x^2+x-1=0$.

Обчислимо значення виразу $x_1^5-5x_1=\left(x_1^3-x_1^2+2x_1-3\right)\left(x_1^2+x_1-1\right)-3=-3.$

Завдання 2

Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1,\\ |x-1|+y=2.\end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1,\\ |x-1|+y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|y-2|-y=-1,\\ |x-1|+y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|y-2|=y-1,\\ |x-1|=2-y.\end{cases}$$

Очевидно, що $1\le y\le 2$, тому

$$\begin{cases}|y-2|=y-1,\\ |x-1|=2-y;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y-2=y-1,\\ y-2=1-y\end{array}\right.\\ |x-1|=2-y;\\ 1\le y\le 2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y\in\varnothing,\\ y=1{,}5;\end{array}\right.\\ |x-1|=2-1{,}5;\\ 1\le y\le 2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1{,}5,\\ |x-1|=0{,}5;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1{,}5,\\ \left[\begin{array}{l}x-1=0{,}5,\\ x-1=-0{,}5;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1{,}5,\\ x=1{,}5;\end{cases}\\ \begin{cases}y=1{,}5,\\ x=0{,}5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. $(1{,}5;1{,}5)$, $(0{,}5;\ 1{,}5)$.

Зауваження: Завдання легко розв'язується графічним методом, достатньо побудувати в одній системі координат графік першого рівняння і функції $y=2-|x-1|$.

Завдання 3

Доведіть, $76^{2014}+12^{2014}$ *ділиться на 37, без остачі.*

Розв'язання.

Відомо, що для будь-якого непарного $n\in\mathrm{N}$ справедлива рівність:
$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$

Звідси отримаємо:

$$76^{2014}+12^{2014}=\left(76^2\right)^{1007}+\left(12^2\right)^{1007}=\left(76^2+12^2\right)\left(\left(76^2\right)^{1006}-\left(76^2\right)^{1005}\cdot 12^2+\ldots-76^2\cdot\left(12^2\right)^{1005}+\left(12^2\right)^{1006}\right).$$

Оскільки $76^2+12^2=5776+144=5920$, $5920:37=160$, то добуток $\left(76^2+12^2\right)\left(\left(76^2\right)^{1006}-\left(76^2\right)^{1005}\cdot 12^2+\ldots-76^2\cdot\left(12^2\right)^{1005}+\left(12^2\right)^{1006}\right)\vdots 37$. Що й треба було довести.

II спосіб. ***Розв'язування:*** $76\equiv 2(mod 37)$. $76^{2014}\equiv 2^{2014}(mod 37)$ тому , $76^{2014}+12^{2014}\equiv 2^{2014}+12^{2014}\equiv 2^{2014}(1+6^{2014})\equiv 2^{2014}(1+36^{1007})\equiv 2^{2014}(1+36)(1-36+36^2-36^3+36^4\ldots.)\equiv 2^{2014}37(1-36+\ldots)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 37)$.

Завдання 4

Знайти усі трійки цілих чисел (x, y, z), для яких $\begin{cases} x+3y+xz=7, \\ x+2y-yz=1. \end{cases}$

Розв'язання.

З другого рівняння системи знайдемо $x=1-2y+yz$ і підставимо це значення у перше рівняння системи. Після нескладних перетворень дістанемо рівняння $y(z^2-z+1)=6-z$. З умови випливає, що $y=\dfrac{6-z}{z^2-z+1}$ – ціле число.

Підставляючи сюди послідовно $z=0,1,2,3,4,5,6,$ отримаємо цілі числа тільки при $z=0, z=1, z=6$. Якщо $z\geq 7$, то $y<0$, звідки $y\leq -1$, отже, $\dfrac{6-z}{z^2-z+1}\leq -1$. Легко пересвідчитись, що ця нерівність не має розв'язків. Якщо $z\leq -1$, то $y>0$, звідки $y\geq 1$, отже, $\dfrac{6-z}{z^2-z+1}\geq 1$. Ця нерівність рівносильна нерівності $z^2-z+1\leq 6-z$, або ж $z^2\leq 5$. Це значить, що досить перевірити значення $z=-1, z=-2$. Бачимо, що в жодному випадку число y не буде цілим. Таким чином, дістали відповідь: $(1;0;6),(-4;5;1),(-11;6;0)$.

Відповідь. $(-4;5;1)$, $(1;0;6)$, $(-11;6;0)$.

Завдання 5

Знайти дійсні значення параметра a, при яких нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ *справедлива для всіх тих значень x, які задовольняють нерівність* $|x<1|$.

Розв'язання.

Нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ виконується для всіх $x\in(-1;1)$, якщо проміжок $(-1;1)$ є підмножиною розв'язків даної нерівності.

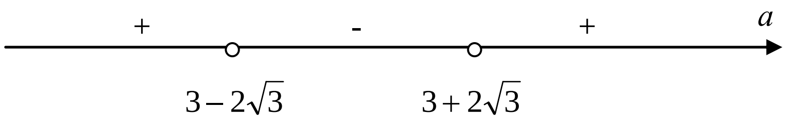
1. Якщо $D<0$, то нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ виконується для всіх $x\in R$, а отже, і для $x\in(-1;1)$.

Обчислимо D: $D=|a-1|^2-4(a+1)=a^2-2a+1-4a-4=a^2-6a-3$.

$$a^2-6a-3<0;$$

Розв'яжемо нерівність $D<0$: $\dfrac{D}{4}=9+3=12;$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=3-\sqrt{12}=3-2\sqrt{3}; \\ a_2=3+\sqrt{12}=3+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$



$a\in\left(3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right).$

Отже, при $a\in\left(3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right)$ умова виконується.

2. При $D\ge 0$ $a\in\left(-\infty;3-2\sqrt{3}\right]\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right).$

Це означає, що нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ має розв'язки $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

Умова задачі буде виконуватись, якщо проміжок $(-1;1)$ є підмножиною одного з проміжків $(-\infty;x_1)$, $(x_2;+\infty)$.

Тобто, якщо обидва корені квадратного тричлена $f(x)=x^2-|a-1|x+a+1$ менші від -1 або більші від 1.

За теоремами про розташування коренів квадратного тричлена маємо:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ x_в\le -1, \\ f(-1)\ge 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} D\ge 0, \\ x_в\ge 1, \\ f(1)\ge 0. \end{cases}$$

$x_в=\dfrac{|a-1|}{2}\ge 0$, тому перша система розв'язків не має.

Розглянемо другу систему:

$$\begin{cases} a\in\left(-\infty;3-2\sqrt{3}\right]\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right), \\ \dfrac{|a-1|}{2}\ge 1, \\ 1-|a-1|+a+1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;3-2\sqrt{3}\right]\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right), \\ |a-1|\ge 2, \\ |a-1|\le a+2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;3-2\sqrt{3}\right]\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right), \\ \left[\begin{array}{l} a-1\ge 2, \\ a-1\le -2; \end{array}\right. \\ \begin{cases} a-1\le a+2, \\ a-1\ge -a-2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;3-2\sqrt{3}\right]\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right) \\ a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty), \\ a\in[-0,5;+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right)$$

Об'єднавши обидва результати, маємо $a\in\left(3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right)\cup\left[3+2\sqrt{3};+\infty\right)=\left(3-2\sqrt{3};+\infty\right).$

Відповідь. $a\in\left(3-2\sqrt{3};+\infty\right)$

Завдання 6

Знайти $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$, якщо $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=a$.

Розв'язання.

З умови випливає, що $x \in R,\ y \in R$. Нехай $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=B$, тоді

$$|B|=\sqrt{B^2}=\sqrt{\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x^2y^2+2xy\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}};$$

За умовою $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=a$, тоді $\left(xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right)^2=a^2$, тобто

$$x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+(1+x^2)(1+y^2)=a^2;$$

$$x^2+y^2+2x^2y^2+2xy\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}=a^2-1.$$

Таким чином, $|B|=\sqrt{a^2-1}$, тобто $B=\pm\sqrt{a^2-1}$.

II спосіб . Так як $\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2=x^2(1+y^2)+y^2(1+x^2)+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=$

$$=(1+x^2)(1+y^2)+x^2y^2-1+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=\left(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy\right)^2-1=a^2-1.$$

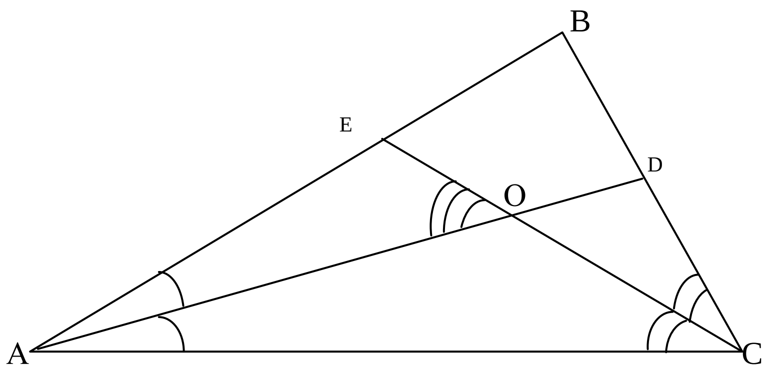
Отже, значення шуканого виразу рівне $\mp\sqrt{a^2-1}$. Обидва випадки можливі . оскільки при одночасній зміні знака x і y шуканий вираз міняє знак.

Відповідь. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=\pm\sqrt{a^2-1}$.

Завдання 7

Прямі, на яких лежать дві бісектриси внутрішніх кутів трикутника, утворюють кут 45°, а прямі, на яких лежать дві його медіани, утворюють кут 90° Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання.



Нехай бісектриси AD та CE трикутника ABC утворюють кут 45°, O – точка їх перетину. Якщо $\angle AOC=\angle DOE=45^\circ$, то $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C+45^\circ=180^\circ$, що неможливо, тому $\angle DOC=\angle AOE=45^\circ$, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C+135^\circ=180^\circ$, тоді $\angle B=90^\circ$.

Введемо систему координат, вважаючи, що $B(0;0), A(a;0), C(0;c)$ – координати вершин трикутника, $M(\frac{a}{2};0), N(0;\frac{c}{2}), K(\frac{a}{2};\frac{c}{2})$ – середини його сторін. Які з векторів $\overrightarrow{BK}=(\frac{a}{2};\frac{c}{2}), \overrightarrow{AN}=(-a;\frac{c}{2}), \overrightarrow{CM}=(\frac{a}{2};-c)$ можуть бути перпендикулярними ? Оскільки такими не можуть бути останні два, а інші два випадки дають однакову відповідь за симетрією, вважатимемо, що $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AN}=0$, тому $c^2=2a^2$, отже, гострі кути даного трикутника дорівнюють $arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Завдання 8

Два хлопчики грають у гру. Перший викреслює серед натуральних чисел два послідовних (менше з них непарне), сума яких є квадратом цілого числа, другий викреслює таку ж пару чисел, для яких ця ж сума є кубом цілого числа. Хто з них викреслить більшу кількість.

Розв'язання.

Нехай перший хлопчик викреслює числа $(2n-1)$, $2n$, $n\in N$, тоді $p^2=4n-1$.
Оскільки квадрати чисел при діленні на 4 дають остачі 0 або 1, а числа $4n-1$ при діленні на 4 дають остачу 3, то рівність $p^2=4n-1$ неможлива, тобто перший хлопчик не викреслить жодної пари чисел.
Нехай другий хлопчик викреслює числа $(2k-1)$, $2k$, $k\in N$, тоді $q^3=4k-1$.
Оскільки куби чисел при діленні на 4 дають остачі 0 , 1 або 3, а числа $4k-1$ при діленні на 4 дають остачу 3, то рівність $q^3=4k-1$ можлива, тобто другий хлопчик буде викреслювати деякі пари чисел.
Отже, другий хлопчик викреслить більше пар чисел, ніж перший.
Відповідь. другий хлопчик.